Rappels mathématiques

Prof. Cécile Hébert

19 septembre 2016

Vecteurs : caractéristiques

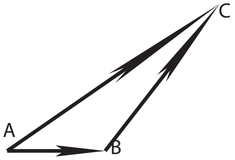
Un vecteur est caractérisé par sa norme, sa direction et son sens.

Un vecteur servira donc à représenter une grandeur pour laquelle, en plus de la "valeur", il est important de savoir le sens et la direction.

Typiquement, ce sont les déplacements, les vitesses, les accélérations et les forces.

Vecteurs : arithmétique

Additions et soustractions

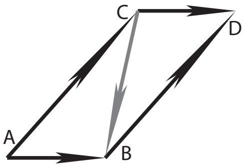


$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Vecteurs : arithmétique

Additions et soustractions



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABCD \text{ parallélogramme } \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

Preuve directe

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$ par hypothèse

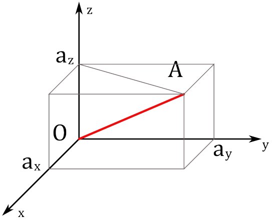
Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$

$\square$

Vecteurs : notation

Afin de manipuler les vecteurs dans l'espace (à 3 dimensions), il est commode de les décomposer selon leurs composantes cartésiennes.

On fait partir le vecteur de l'origine du repère, les composantes du vecteur sont alors les coordonnées cartésiennes de son extrémité :



ici $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$
il a comme composantes a_x, a_y, a_z

Un vecteur peut être écrit de différentes manières, toutes équivalentes.

Vous rencontrez toutes ces notations dans les livres, il faut donc les connaître toutes.

Le vecteur $\vec{a}$ s'écrira par exemple :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. \qquad \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

N.B. : dans certains livres, le vecteur $\vec{a}$ est noté $\mathbf{a}$ pour des raisons de caractères d'impression. . .

Avec ces notations, la somme de deux vecteurs se calcule par la somme de ses composantes

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right. + \vec{b}\left|\begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array}\right. = \vec{a}+\vec{b}\left|\begin{array}{l} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{array}\right.$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par la soustraction des coordonnées des points B et A.

$$A\left|\begin{array}{l} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array}\right. ; \; B\left|\begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array}\right. \rightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array}\right.$$

La dérivée d'un vecteur se calcule composante par composante

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \left| \begin{array}{l} \frac{da_x}{dt} \\ \frac{da_y}{dt} \\ \frac{da_z}{dt} \end{array} \right.$$

Vecteurs : norme

Définition

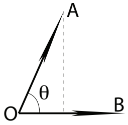
La norme d'un vecteur est par définition la longueur du segment sous-tendu, c'est-à-dire que pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ donné, sa norme est la longueur du segment $[AB]$.
Mathématiquement parlant, la norme est donnée par la racine carrée de la somme des composantes :

$$||\vec{a}|| := \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

en règle générale, on notera :

$$||\vec{a}|| = a$$

Produit scalaire



Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se définit comme

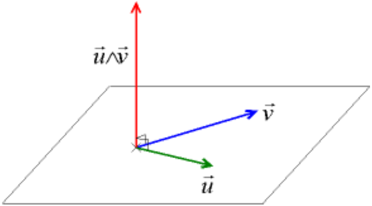
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = ||\overrightarrow{OA}|| \cdot ||\overrightarrow{OB}|| \cdot \cos(\widehat{AOB})$$

soit la projection du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$

A noter que la composante a_i de $\vec{a}$ s'obtient en effectuant $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$

($a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x$ et de même pour y et z)

Produit vectoriel



Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

- le vecteur $\vec{w}$ est *orthogonal* aux deux vecteurs donnés ;
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de *sens direct* ;
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$

Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. \wedge \ \vec{b} \left| \begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array} \right. = \vec{c} \left| \begin{array}{l} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{array} \right.$$

si on note $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires d'un trièdre orthonormé direct :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

et de plus

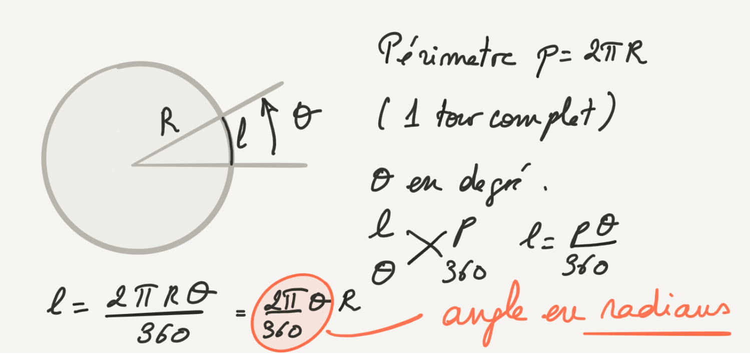
$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

Trigonométrie

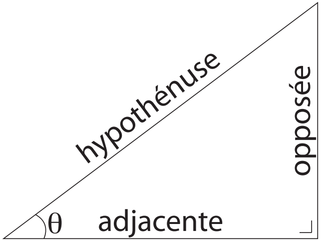
Nous utiliserons souvent les angles en *radians* .

Le cercle complet fait 2π radians. Cette définition permet de relier directement la longueur de l'arc de cercle à l'angle et au rayon par $l = R\theta$ avec θ en radians.



Trigonométrie dans le triangle rectangle

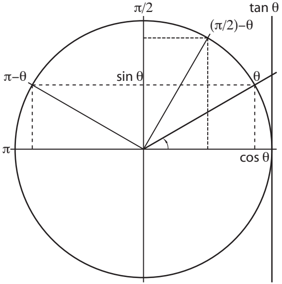
Définitions



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

Cercle trigonométrique

Equivalences trigonométriques



$$\cos\theta = -\cos(\pi-\theta) \qquad \sin\theta = \sin(\pi-\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$

Angles particuliers : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;
$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Identités trigonométriques

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \tag{1}$$

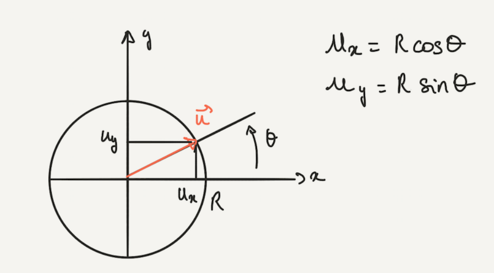
$$\boxed{\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1} \tag{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b && (3) \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a && (4) \end{aligned}}$$

...et bien d'autres dans votre formulaire et sur le web. Vous devez les savoir ou savoir les retrouver (ou les mettre dans votre formulaire personnel)

Vecteurs et trigonométrie

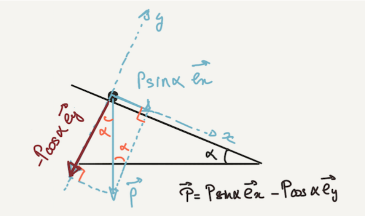
Vous aurez souvent à trouver les composantes d'un vecteur dont vous connaissez la norme, et l'angle qu'il fait par rapport à un axe de référence. En d'autre termes, la projection d'un vecteur donné sur des axes (pas forcément verticaux ou horizontaux).



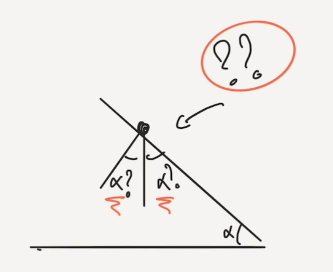
Il suffit d'étendre la logique du cas ci-dessus

Vecteurs et trigonométrie

Par exemple, ici, on décompose une force (le poids) en deux composantes portées respectivement par l'axe x et l'axe y. Avant de faire la projection, il faut bien identifier l'angle par des considérations géométriques.



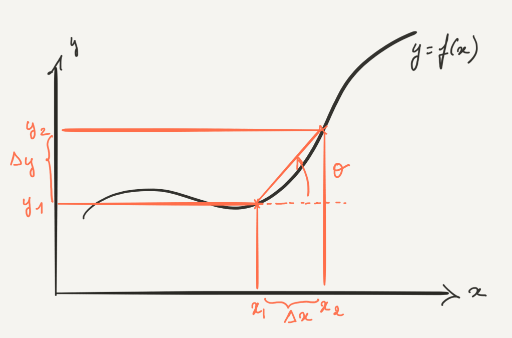
Pour cela, faites toujours un dessin avec des angles franchement différents de 45 degrés ! Sinon vous risquez de faire des erreurs dans le report des angles.



Dérivées

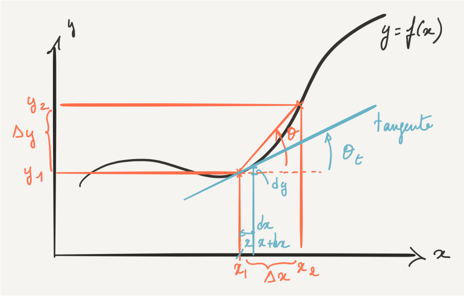
Soit une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe $y = f(x)$ dans le plan. La corde prise entre deux points a une pente caractérisée par l'angle θ.

$$\tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$



La dérivée de la fonction f au point 1 est la limite de $\tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ quand le point 2 tend vers le point 1. C'est donc la *pente de la tangente à la courbe*.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$



En physique on utilisera souvent la variation infinitésimale de la fonction f

$$df = f(x+dx) - f(x)$$

pour une variation dx de x.

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Vous devez connaître les dérivées des fonctions usuelles.

pour un produit de fonctions

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Pour une composition de fonctions

$$[f(g)]' = g' \cdot f'(g)$$

Et tout le reste se connaît ou se retrouve à partir de ça, par exemple $(f/g)'$

Primitive

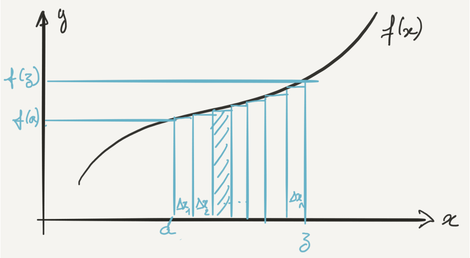
Calculer la primitive de f(x), c'est "la manoeuvre réciproque" du calcul de la dérivée.

C'est chercher la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

Comme la dérivée d'une constante est 0, on peut ajouter n'importe quelle constante à F ça ne change rien, donc "la primitive de F est définie à une constante près.

Intégrale

On cherche à calculer l'aire sous la courbe entre le point $x = a$ et $x = z$.



C'est à peu près la somme des petits rectangles de largeur Δx_i et de hauteur $f(x_i)$

$$\mathcal{A} \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

Plus Δx est petit plus l'aire est calculée juste. Finalement

$$\mathcal{A} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_a^z f(x)dx = F(z) - F(a)$$

Développemnt limité en série de Taylor

But : On cherche à évaluer la valeur d'une fonction à proximité d'un point x_0, soit $f(x_0+\varepsilon)$ avec ε petit :

$$f(x_0+\varepsilon) \simeq f(x_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)\varepsilon + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x_0)$$

Example

$f(x) = (1+x)^n$ pour x petit : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = n(1+x)^{(n-1)}$. Il en suit :

$$f(x) \simeq f(1) + n(1+0)^{n-1}x + \cdots \simeq 1 + nx$$

De même, $\dfrac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} \simeq 1 - nx$

Développement limité en série de Taylor

Les plus utilisés en physique ; à connaître

$$\boxed{\begin{aligned} (1+x)^n &\simeq 1+nx & \cos(x) &\simeq 1-\frac{x^2}{2} \\ (1+x)^{-n} &\simeq 1-nx & \sin(x) &\simeq x \\ \ln(1+x) &\simeq x & \tan(x) &\simeq x \\ e^x &\simeq 1+x & & \end{aligned}}$$